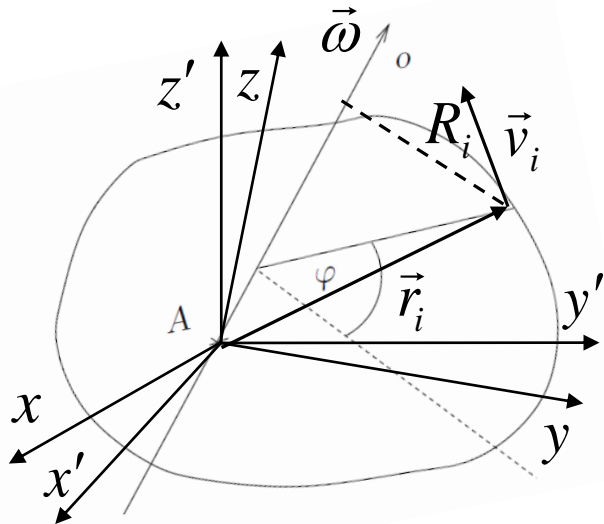


# Opakování - Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



- Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i]$$

- Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \vec{J} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

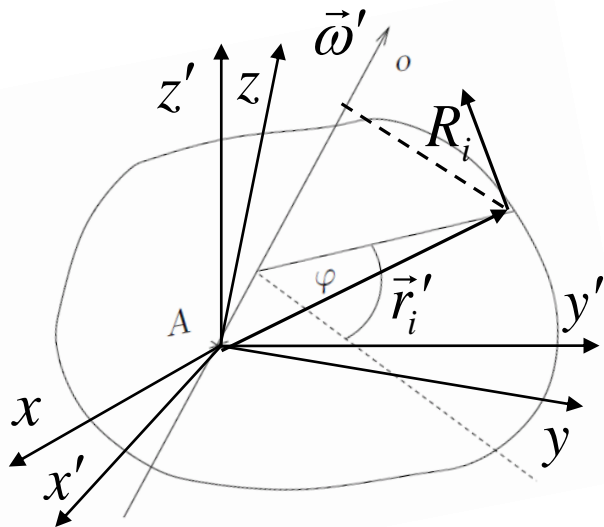
- Přejít od soustavy pevně spojené s tělesem k soustavě pevné v prostoru:

$$\left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)_T = 0, \quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \Rightarrow \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)_T = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\text{analogicky: } \frac{d\vec{B}}{dt} - \left( \frac{d\vec{B}}{dt} \right)_T = \vec{\omega} \times \vec{B} \Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = \left( \frac{d\vec{B}}{dt} \right)_T + \vec{\omega} \times \vec{B}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow \left( \frac{d\vec{B}}{dt} \right)_T + \vec{\omega} \times \vec{B} = \vec{M}, \quad \text{kde } \vec{M} \equiv (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$$

# Opakování - Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



- Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i]$$

- Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \vec{J} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

- Rozepíšeme poslední rovnici do složek:

$$\frac{d\beta_x}{dt} + \Omega_y \beta_z - \Omega_z \beta_y = \mu_x$$

$$\frac{d\beta_y}{dt} + \Omega_z \beta_x - \Omega_x \beta_z = \mu_y$$

$$\frac{d\beta_z}{dt} + \Omega_x \beta_y - \Omega_y \beta_x = \mu_z$$

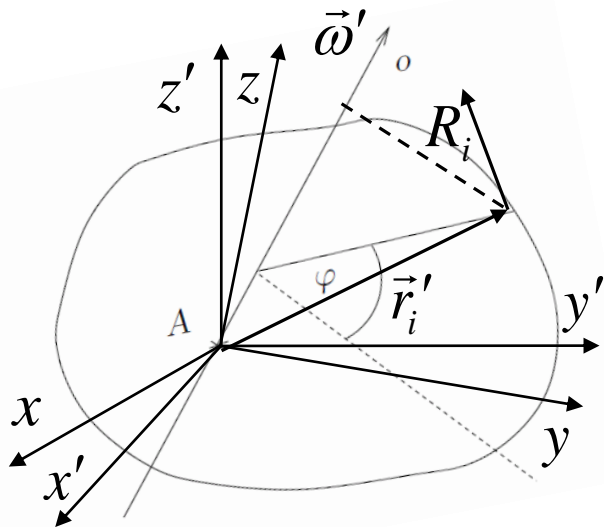
- dosadíme složky tenzoru setrvačnosti:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\beta_x = J_{xx} \Omega_x + J_{xy} \Omega_y + J_{xz} \Omega_z$$

$$\frac{d\beta_x}{dt} = J_{xx} \frac{d\Omega_x}{dt} + J_{xy} \frac{d\Omega_y}{dt} + J_{xz} \frac{d\Omega_z}{dt}$$

# Opakování - Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



- Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i]$$

- Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \vec{J} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

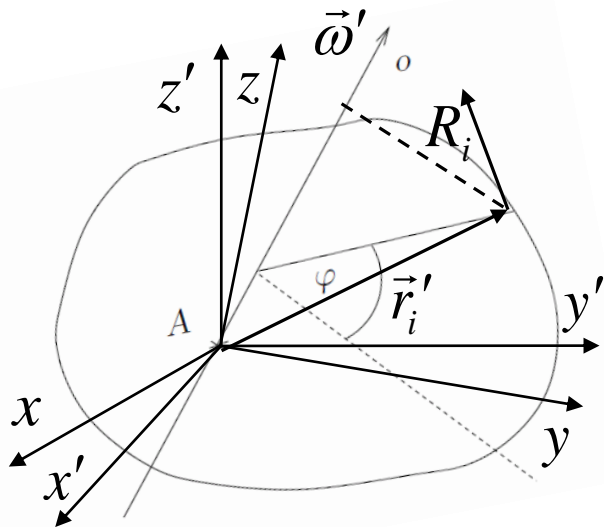
- Rozepíšeme poslední rovnici do složek:

$$J_{xx} \frac{d\Omega_x}{dt} + J_{xy} \frac{d\Omega_y}{dt} + J_{xz} \frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_y (J_{zx} \Omega_x + J_{zy} \Omega_y + J_{zz} \Omega_z) - \Omega_z (J_{yx} \Omega_x + J_{yy} \Omega_y + J_{yz} \Omega_z) = \mu_x$$

$$J_{yx} \frac{d\Omega_x}{dt} + J_{yy} \frac{d\Omega_y}{dt} + J_{yz} \frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_z (J_{xx} \Omega_x + J_{xy} \Omega_y + J_{xz} \Omega_z) - \Omega_x (J_{zx} \Omega_x + J_{zy} \Omega_y + J_{zz} \Omega_z) = \mu_y$$

$$J_{zx} \frac{d\Omega_x}{dt} + J_{zy} \frac{d\Omega_y}{dt} + J_{zz} \frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_x (J_{yx} \Omega_x + J_{yy} \Omega_y + J_{yz} \Omega_z) - \Omega_y (J_{xx} \Omega_x + J_{xy} \Omega_y + J_{xz} \Omega_z) = \mu_z$$

# Opakování - Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



- Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i]$$

- Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \vec{J} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

- Zvolím-li soustavu souřadnou spjatou s tělesem v hlavních osách tenzoru setrvačnosti:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

- Dostaneme **Eulerovy rovnice**:

$$J_1 \frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_y \Omega_z (J_3 - J_2) = \mu_x$$

$$J_2 \frac{d\Omega_y}{dt} + \Omega_z \Omega_x (J_1 - J_3) = \mu_y$$

$$J_3 \frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_x \Omega_y (J_2 - J_1) = \mu_z$$

# Opakování - Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

## • Eulerovy rovnice:

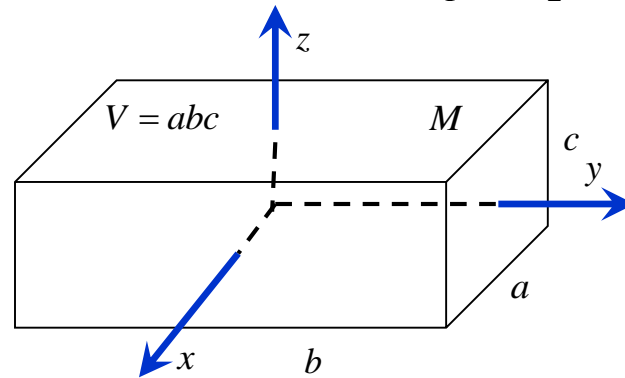
$$J_1 \frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_y \Omega_z (J_3 - J_2) = \mu_x$$

$$J_2 \frac{d\Omega_y}{dt} + \Omega_z \Omega_x (J_1 - J_3) = \mu_y$$

$$J_3 \frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_x \Omega_y (J_2 - J_1) = \mu_z$$

## • Setrvačnick - těleso otáčející se kolem pevného bodu:

### • Asymetrický setrvačnick - všechny tři hlavní momenty setrvačnosti různé: $J_1 \neq J_2 \neq J_3$

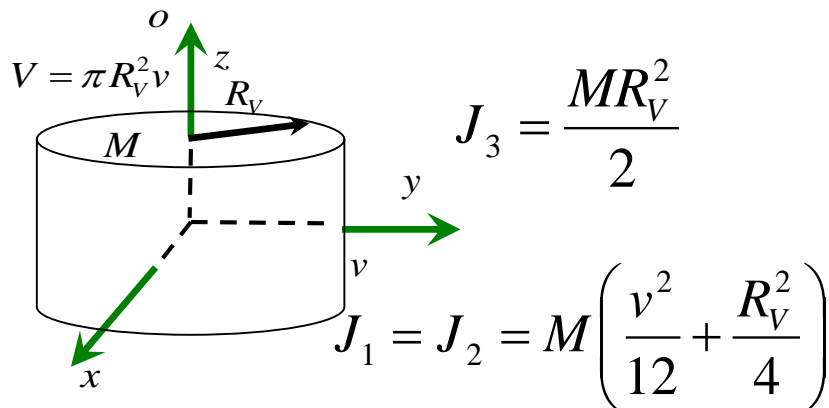


$$J_1 = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$$

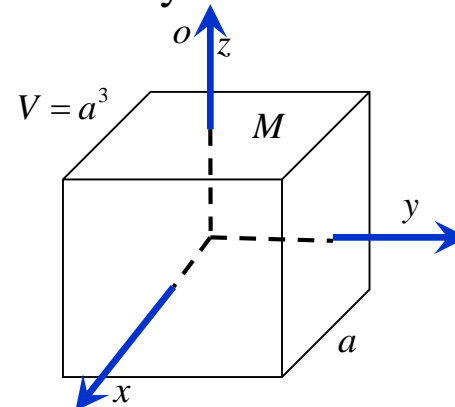
$$J_2 = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)$$

$$J_3 = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

### • Symetrický setrvačnick - dva hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 \neq J_3$



### • Kulový setrvačnick - všechny tři hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 = J_3$



$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{Ma^2}{6}$$

# Opakování - Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

## • Eulerovy rovnice:

$$J_1 \frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_y \Omega_z (J_3 - J_2) = \mu_x$$

$$J_2 \frac{d\Omega_y}{dt} + \Omega_z \Omega_x (J_1 - J_3) = \mu_y$$

$$J_3 \frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_x \Omega_y (J_2 - J_1) = \mu_z$$

• **Kulový setrvačnick**-všechny tři hlavní momenty setrvačnosti stejné:  $J_1 = J_2 = J_3 = J$

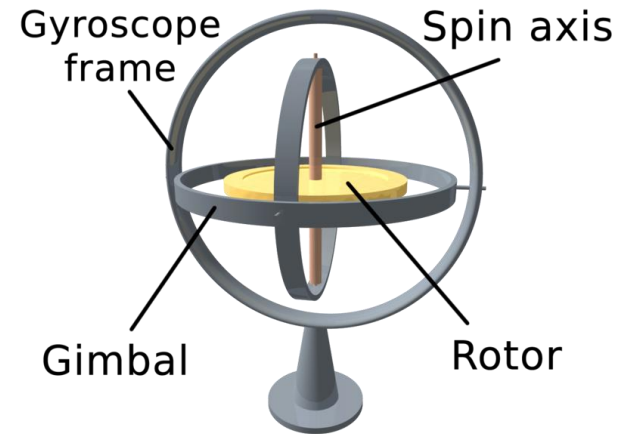
$$J \frac{d\Omega_x}{dt} = 0, \quad J \frac{d\Omega_y}{dt} = 0, \quad J \frac{d\Omega_z}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \Omega_x = konst, \quad \Omega_y = konst, \quad \Omega_z = konst.,$$

• **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly:  $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$

V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

• např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.



$$\beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j \Rightarrow \beta_x = J\Omega_x, \beta_y = J\Omega_y, \beta_z = J\Omega_z \Rightarrow \vec{B} = J\vec{\omega}$$

# Opakování - Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

- Moment hybnosti je tedy násobkem vektoru úhlové rychlosti:

$$\vec{B} = J\vec{\omega}$$

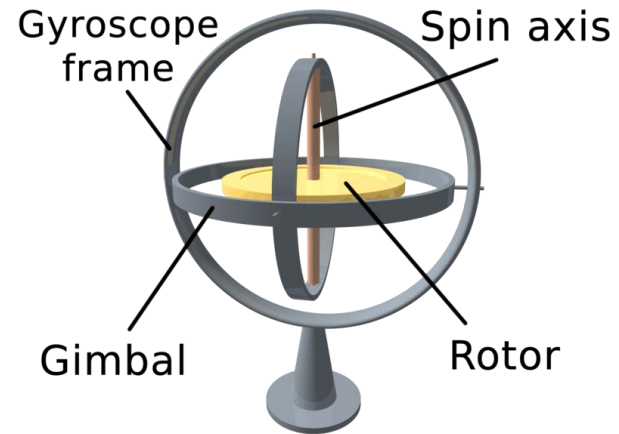
- Nezávisí na volbě soustavy souřadnic, platí tedy i pro soustavu souřadnou pevnou v prostoru.

- Z druhé věty impulzové:

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{B} = konst \Rightarrow \vec{\omega} = konst$$

- Volný kulový setrvačnick rotuje kolem své libovolné osy stálou úhlovou rychlostí, přičemž osa je v prostoru i v tělese po celou dobu pohybu stálá.

- **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly:  $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$   
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).
- např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.



# Opakování - Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

- **Symetrický setrvačnick** - budeme předpokládat, že osou rotace je z-ová

osa souřadnic :  $J_1 = J_2 \neq J_3$

$$J_1 \frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_y \Omega_z (J_3 - J_1) = 0$$

$$J_1 \frac{d\Omega_y}{dt} + \Omega_z \Omega_x (J_1 - J_3) = 0$$

$$J_3 \frac{d\Omega_z}{dt} = 0 \Rightarrow \Omega_z = konst.$$

- Rovnice upravíme:

$$\frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_y \Omega_z \frac{J_3 - J_1}{J_1} = 0 \Rightarrow \Omega_y = -\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega_x}{dt}$$

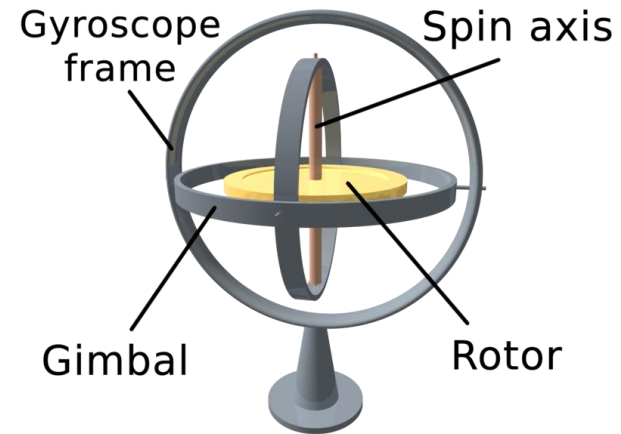
$$\frac{d\Omega_y}{dt} - \Omega_x \Omega_z \frac{J_1 - J_3}{J_1} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \Omega_x}{dt^2} + \Omega^2 \Omega_x = 0$$

$$\Omega_z \frac{J_1 - J_3}{J_1} = \Omega = konst.$$

- **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly:  $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$

V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

- např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.





# Opakování - Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

- Rovnice formálně stejná jako pro harmonický kmit:

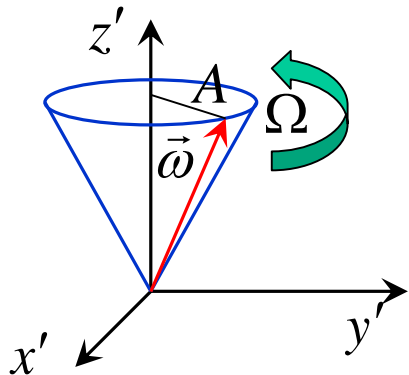
$$\frac{d^2 \Omega_x}{dt^2} + \Omega^2 \Omega_x = 0$$

$$\Omega_x = A \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\Omega_y = -\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega_x}{dt} = -A \cos(\Omega t + \alpha)$$

- Počáteční podmínky:

$$\vec{\omega}(t=0) = (\Omega_{0x}, \Omega_{0y}, \Omega_{0z})$$



- Rychlost **precese**:

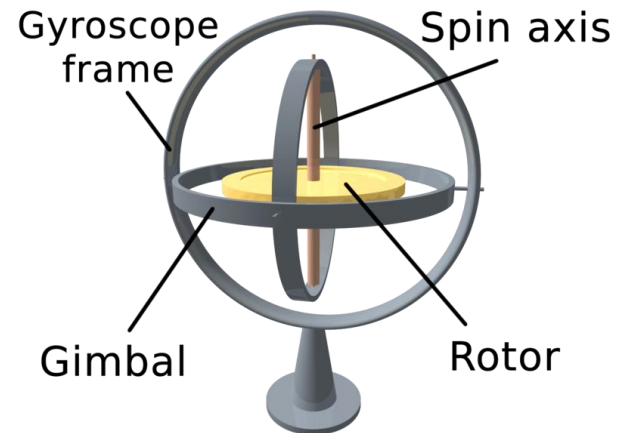
$$\Omega = \Omega_z \frac{J_1 - J_3}{J_1} = \text{konst.}$$

$$\Omega_x^2 + \Omega_y^2 = A^2 [\sin^2(\Omega t + \alpha) + \cos^2(\Omega t + \alpha)] = A^2$$

- **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly:  $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$

V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

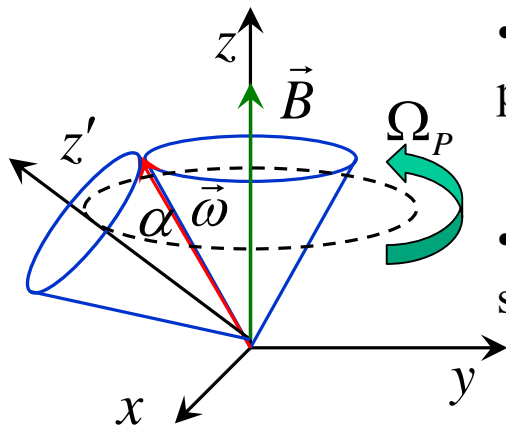
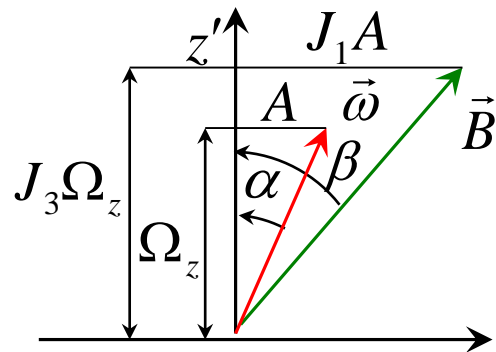
- např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.



# Opakování - Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

- Pro složky momentu hybnosti dostaneme:

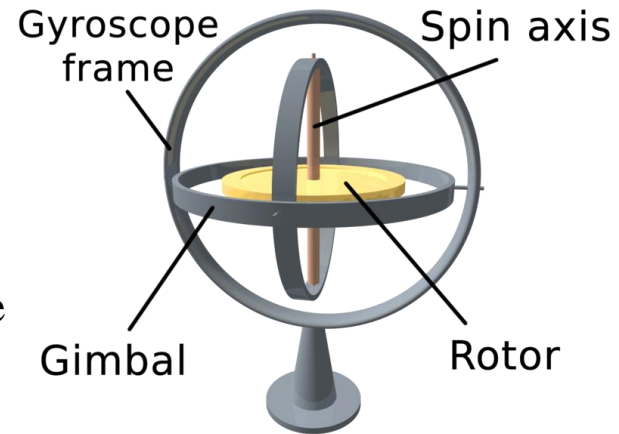
$$\beta_x = J_1 \Omega_x, \beta_y = J_1 \Omega_y, \beta_z = J_3 \Omega_z$$



- vektor momentu hybnosti je pevný v prostoru:  $\frac{d\vec{B}}{dt} = 0$
- Rychlost precese osy symetrie setrvačnicku v prostoru:

$$\Omega_P = \omega \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

- **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly:  $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$   
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).
- např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.



# Opakování - Volný symetrický setrvačnick - Eulerovy rovnice

- speciální volba počátečních podmínek:

$$\Omega_x = A \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\Omega_y = -A \cos(\Omega t + \alpha)$$

$$\Omega_{0x} = \Omega_{0y} = 0, \quad \Omega_{0z} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0, \quad \Omega_x = \Omega_y = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_x = \beta_y = 0, \quad \beta_z = J_z \Omega_z$$

- vektor momentu hybnosti je rovnoběžný s vektorem úhlové rychlosti a pevný v prostoru:

$$\vec{B} // \vec{\omega}, \quad \frac{d\vec{B}}{dt} = 0$$

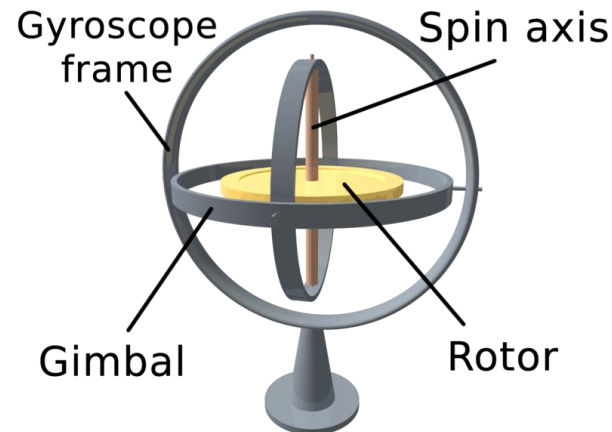
- Osa otáčení má v tělese i prostoru stálý směr a setrvačnick kolem ní rotuje konstantní úhlovou rychlostí:

$$\omega = \Omega_z$$

- **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly:  $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$

V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

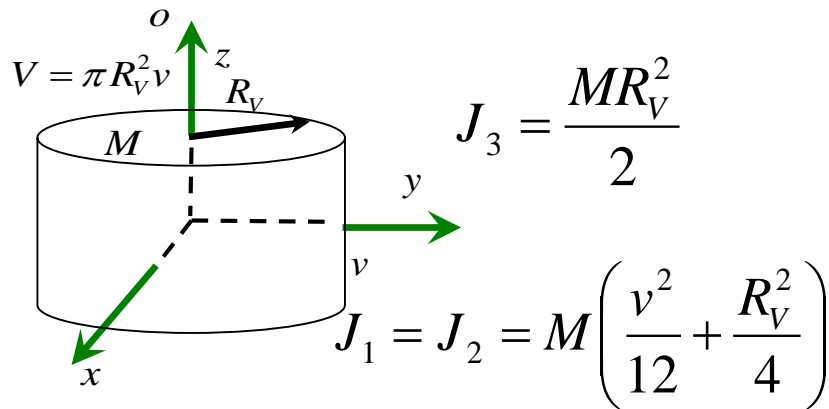
- např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.



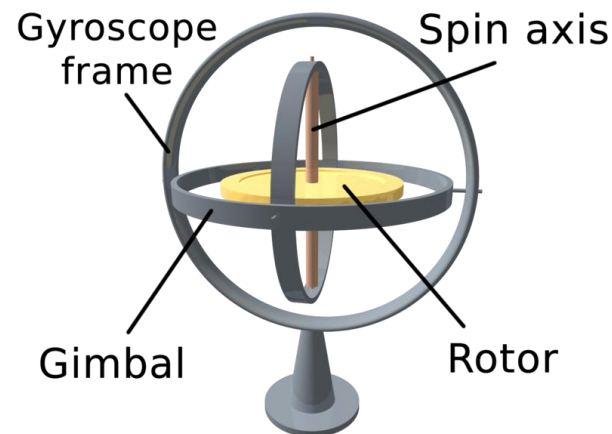
# Opakování - Volný symetrický setrvačnick – volná osa

- Osa tělesa, vůči níž může těleso udržovat stálou rotaci, se nazývá **volná osa**. U kulového setrvačnicku jsou volné všechny osy procházející hmotným středem. U symetrického setrvačnicku jsou volné jak osa symetrie tělesa, tak všechny osy kolmé na osu symetrie procházející hmotným středem.

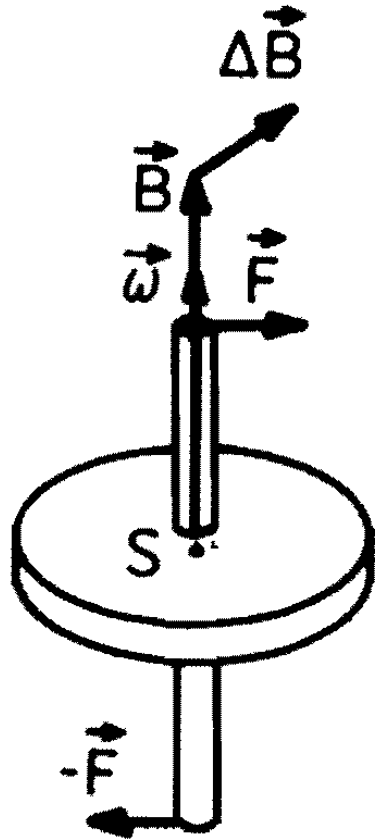
- **Symetrický setrvačnick** - dva hlavní momenty setrvačnosti stejné:  $J_1 = J_2 \neq J_3$



- **Volný (bezsilový) setrvačnick** – setrvačnick, na který nepůsobí vnější síly:  $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$   
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středě (těžišti).
- např. **Kardanův závěs** – setrvačnick je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačnicku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačnick pohybovat jako volný.



# Symetrický setrvačnick – silové působení



- Osa otáčení setrvačnicku má směr celkového momentu hybnosti. Chceme-li osu otáčení setrvačnicku vychýlit, musíme na něj působit nenulovým :

$$\vec{M} \neq 0$$

- Směr momentu sil je kolmý k vektoru momentu hybnosti a ke směru působících sil.

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow \Delta\vec{B} = \vec{M}\Delta t$$

- Přírůstek momentu hybnosti je rovnoběžný s momentem sil a tedy kolmý k vektoru momentu hybnosti. V prvním přiblížení se tedy nemění velikost momentu hybnosti, ale pouze jeho směr.

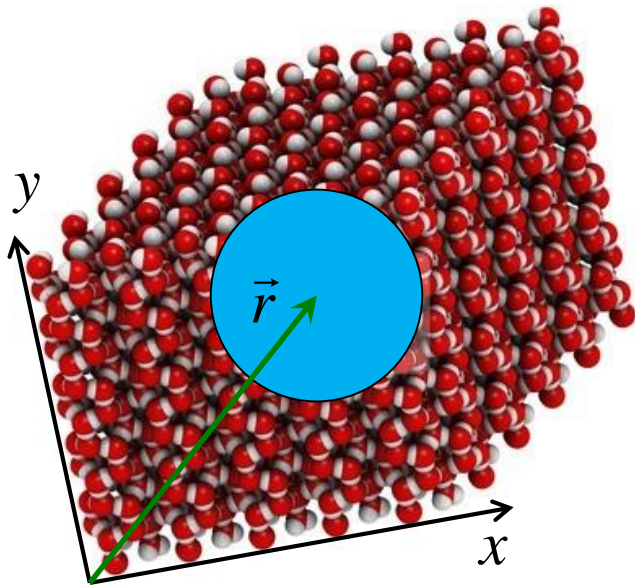
$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \left( \frac{d\vec{B}}{dt} \right)_T + \vec{\omega} \times \vec{B}$$

- Před působením momentu síly je:

$$\vec{\omega} // \vec{B} \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = \left( \frac{d\vec{B}}{dt} \right)_T$$

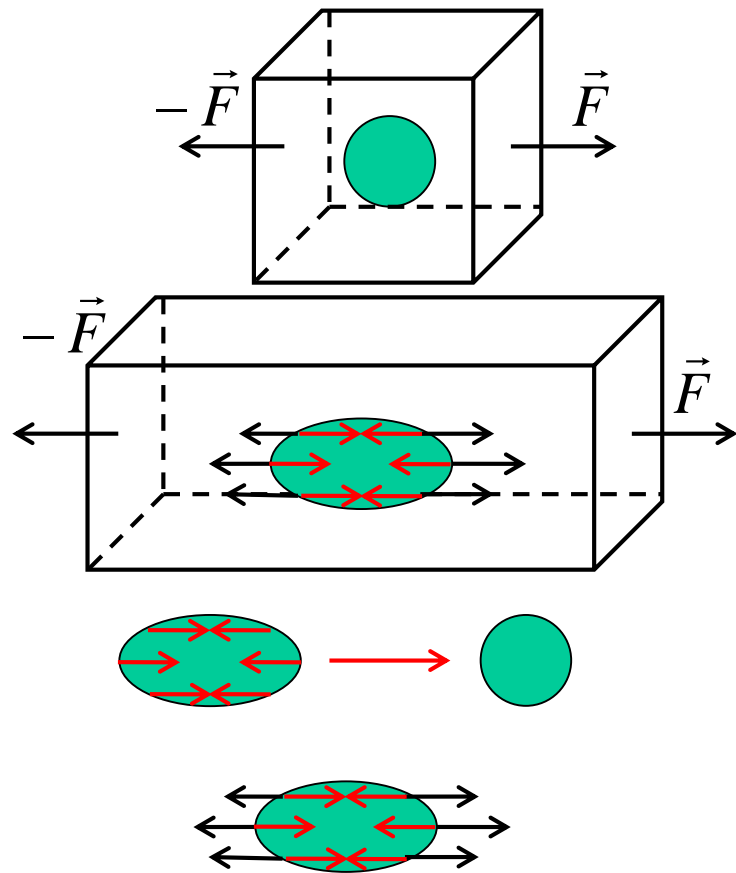
- Změna momentu hybnosti je v prostoru a v tělese stejná.

# Mechanika kontinua



- Představu spojitého prostředí **kontinua** zavádíme pro popis pohybu plynů, kapalin a pro vyšetřování mechanických dějů, při nichž se mění vzájemná vzdálenost jednotlivých bodů pevné látky.
  - Struktura pevných látek neodpovídá představě spojitého prostředí, přesto lze makroskopický popis pohybu kapalin a plynů, stejně jako deformační chování pevných látek na základě této představy dobře popsat.
  - Fyzikální veličiny chápeme jako průměrné hodnoty z tak velkého okolí bodu, aby se v tomto okolí již neprojevovala nespojitá struktura látky.
- 
- Síly v kontinuu lze podle jejich působení rozdělit na objemové a plošné. **Objemové síly** působí současně na všechny částice (elementy) kontinua. Typickou objemovou silou je síla tíhová.
  - **Plošné síly** působí na povrch vyšetřované části kontinua a mají za následek obecně deformaci kontinua.

# Mechanika kontinua – napětí a deformace

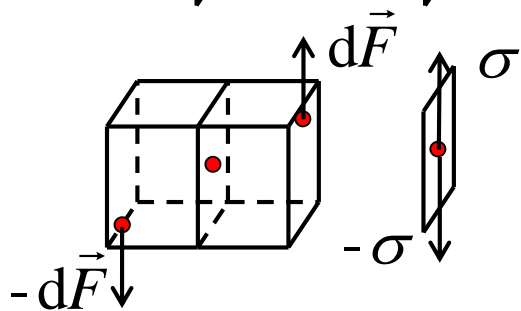
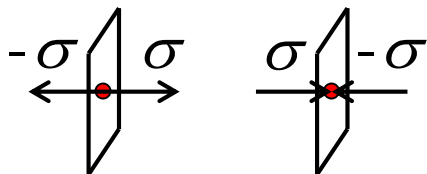
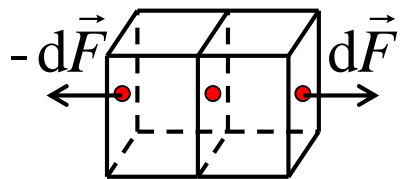
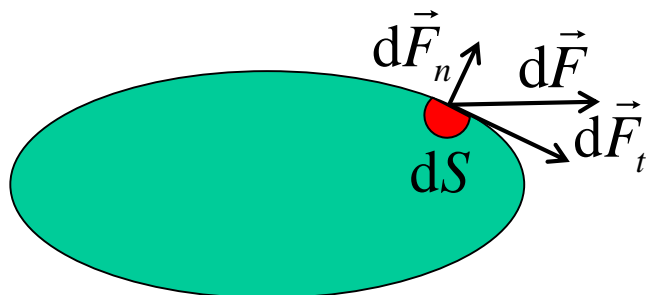


- Plošné síly např. tahová síla působící na kontinuum v jednom směru vede obecně k **deformaci kontinua**.
- Při této deformaci kontinua dojde tedy ke změně rovnovážné polohy částic, což má za následek vznik sil mezi částicemi – tedy vznik **napětí**, které se snaží kontinuum vrátit do původního stavu. Po ustavení rovnováhy mluvíme o stavu napjatosti.
- Pokud tento elipsoid vzniklý deformací vyjmemme z kontinua, nabude původního tvaru.
- Tvar elipsoidu bychom zachovali, pokud bychom na něj působili stejnými silami, jako na něj působilo jeho okolí, když byl v kontinuu. Lze tak nahradit vnitřní působení okolí na vyšetřovanou část kontinua působením vnějším, které je možno kvantitativně vyjádřit.

- Síly jsou rozděleny po ploše vyšetřované části kontinua a podílem:

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

# Mechanika kontinua – napětí a deformace



- Elementární síla může působit v obecném směru vzhledem k normále příslušného elementu plochy.

- Podílem působící elementární síly a elementu plochy můžeme zavést pojem napětí:

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

- Jednotkou napětí je pascal (Pa), tedy  $\text{Nm}^{-2}$ .

- Napětí můžeme pomocí normálové a tečné složky elementární síly rozdělit na normálovou a tečnou složku napětí:

$$\vec{\sigma}_n = \frac{d\vec{F}_n}{dS}, \quad \vec{\sigma}_t = \frac{d\vec{F}_t}{dS}$$

- **Normálové napětí** má charakter **tahu nebo tlaku** na plošce  $dS$  dvou částí kontinua.

- **Tečné napětí** způsobuje změnu tvaru jednotlivých elementů namáhaného kontinua a má charakter **čistého smyku**.